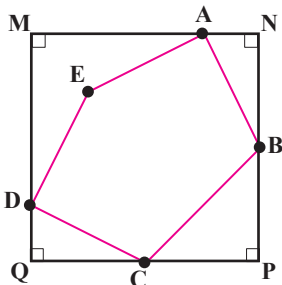




هندسه ۱

۸. در یک دوزنقه قائم‌الزاویه، قطر بزرگ، دوزنقه را به دو مثلث تفکیک کرده که مساحت مثلث قائم‌الزاویه، دو برابر مساحت مثلث دیگر است. اگر قاعده کوچک و ارتفاع دوزنقه برابر باشند، اندازه زاویه‌های داخلی آن را به دست آورید.

۹. در شکل ۱، $MNPQ$ مربع است و نقاط A و D ضلعی را که روی آن واقع‌اند، به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کرده‌اند و B و C نیز وسط‌های ضلع‌های مربع‌اند. همچنین، E نقطه‌ای است که از MQ و MN به فاصله‌ای مساوی $\frac{1}{4}$ ضلع مربع واقع است. مساحت پنج‌ضلعی $ABCDE$ چه کسری از مساحت مربع است؟



شکل ۱

۱۰. دو صفحه P و Q در خط d مشترک‌اند. نقطه A روی صفحه P و غیرواقع بر d و نقطه B روی صفحه Q و غیرواقع بر d مفروض‌اند. خط AB نسبت به d چه وضعی دارد و چرا؟

۱. روش رسم نیم‌ساز یک زاویه را توضیح دهید و بگویید چرا این روش درست کار می‌کند.

۲. با یک مثال نقض نشان دهید این حکم کلی نادرست است: «در هر مثلث، هر ارتفاع از میانه نظیر همان رأس کوتاه‌تر است.»

۳. با استدلال استنتاجی درستی این حکم را ثابت کنید: «در هر مثلث، اگر دو ضلع نابرابر باشند، ارتفاع نظیر ضلع بزرگ‌تر، از ارتفاع نظیر ضلع کوچک‌تر، کوچک‌تر است.»

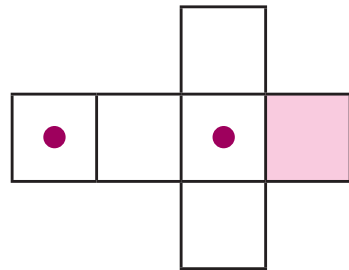
۴. در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو قطعه تقسیم کرده که یکی از آن‌ها ۴ برابر دیگری است. نسبت اضلاع زاویه قائمه مثلث را به دست آورید.

۵. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. اگر M وسط CH و N وسط AH باشد، ثابت کنید:
 $BN \cdot AH = AM \cdot BH$

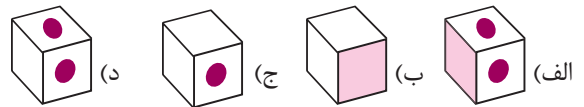
۶. ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی، هر قطر، آن را به دو مثلث با محیط‌های برابر تفکیک کند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۷. در مثلث ABC ، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم و می‌دانیم: $BC = 2AC = 4CH$. اندازه زاویه‌های مثلث را به دست آورید.

۱۱. کدام یک از مکعب‌های زیر مربوط به گسترده شکل ۲ است؟



شکل ۲

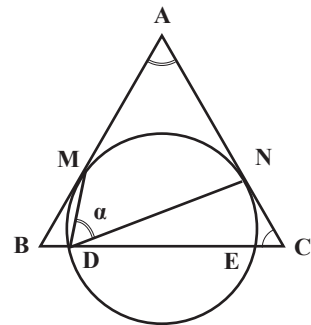


۱۲. نسبت حجم‌های دو شکلی را به‌دست آورید که از دوران یک مربع حول قطر آن و حول ضلع آن پدید می‌آیند.

۱۳. استوانه‌ای را توسط صفحه‌ای موازی ارتفاع آن و به فاصله نصف شعاع قاعده استوانه از آن، برش داده‌ایم. نسبت مساحت مقطع حاصل به مساحت جانبی استوانه را به‌دست آورید.

هندسه ۲

۱. در شکل ۳، اضلاع AB و AC بر دایره مماس‌اند. اگر داشته باشیم: $\hat{A} = 6^\circ$ و $\hat{C} = 55^\circ$ ، اندازه $\hat{\alpha}$ را به‌دست آورید.



شکل ۳

۲. دایره‌های C و C' در نقاط A و B متقاطع‌اند و قطر AD از دایره C بر دایره C' مماس است. امتداد DB دایره C' را در E قطع کرده است. اگر B وسط DE باشد، ثابت کنید: $AB=BD$.

۳. دوزنقه‌ای در دایره‌ای محاط است، به‌طوری که قاعده بزرگ دوزنقه قطری از دایره است و قاعده کوچک دوزنقه و یکی از ساق‌های آن با شعاع دایره برابرند. فاصله مرکز دایره و نقطه تلاقی قطرهای دوزنقه را برحسب شعاع دایره به‌دست آورید.

۴. ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

۵. دو نقطه A و B به فاصله ۱۳ واحد از یکدیگر و به فاصله‌های ۴ و ۹ از خط d واقع‌اند. نقطه M روی d چنان است که: $MA+MB$ کمترین مقدار ممکن است. این مقدار را به‌دست آورید.

۶. در مثلث ABC ، مجانس‌های مثلث را نسبت به مرکز تجانس B و C و ضریب $k > 0$ رسم می‌کنیم. اگر مجانس B در تبدیل اول، B' و مجانس C در تبدیل دوم C' باشد، ثابت کنید $B'C'$ مجانس BC نسبت به مرکز A است. ضریب تجانس چیست؟

۷. الف) قضیه میانه‌ها در مثلث را بیان و اثبات کنید.
ب) مستطیل $ABCD$ با مرکز تقارن O مفروض است. ثابت کنید برای نقطه دلخواه M در صفحه داریم: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ (قطر مستطیل است).

۸. الف) در مثلث ABC ، d_a طول نیم‌ساز رأس A است. ثابت کنید:

$$d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

ب) در مثلث ABC ، $\hat{A} = 12^\circ$ و AD نیم‌ساز رأس A است.

$$\text{ثابت کنید: } \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

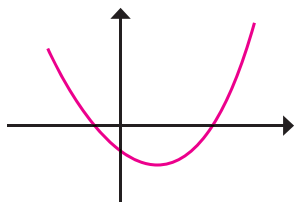
۹. در مثلث به اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵، نقطه‌ای که از دو ضلع کوچک مثلث به فاصله‌های ۶ و ۴ واحد است، از ضلع بزرگ مثلث چه فاصله‌ای دارد؟

۱۰. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{B} = 30^\circ$) نیم‌ساز A ، BC را در D قطع کرده است. الف) طول CD را برحسب $BC=a$ به‌دست آورید.
ب) به کمک قضیه سینوس‌ها مقدار $\sin 75^\circ$ را به‌دست آورید.

حسابان ۱

۱. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر برای سهمی $y = ax^2 + bx + c$ نمودار زیر داده شده باشد، آن‌گاه $abc > 0$



(ب) معادله $\sqrt{x} + |x| = -1$ جواب حقیقی ندارد.

(پ) اگر دو تابع دامنه‌هایشان مساوی باشد، آن دو تابع مساوی‌اند.
 (ت) انتهای کمان متناظر دو رادیان در ربع اول دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد.

(ث) بازه $(-1, 3)$ یک همسایگی محذوف عدد $\frac{3}{4}$ است.

۲. مجموع n جمله اولیه یک دنباله حسابی $S_n = 3n^2 + 2n$ است. مجموع جملات پنجم و ششم آن چقدر است؟

۳. معادله درجه دومی تشکیل دهید که جواب‌های آن $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ باشند.

۴. نقاطی را روی محور طول‌ها بیابید که مجموع فاصله آن‌ها از دو نقطه به طول‌های -2 و 5 روی این محور برابر 10 باشد.

۵. معادلات دو ضلع مربع $3x - 4y = -10$ و $6x - 8y + 5 = 0$ است. مساحت این مربع چند واحد سطح است.

۶. الف) نمودار تابع زیر را رسم کنید.

(ب) برد تابع را با توجه به آن مشخص کنید.

(پ) آیا f یک‌به‌یک است؟ چرا؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & x \leq -1 \\ x^2 - 1 & x > -1 \end{cases}$$

۷. نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right]$ را در بازه $[-1, 3]$ رسم کنید.

۸. اگر

$$f = \{(0, 0), (1, -1), (2, 4)\}$$

$$g = \{(2, -1), (1, 1), (3, 2), (0, 0)\}$$

توابع زیر را مشخص کنید:

الف) $2f+g$

ب) fog

۹. الف) نمودار تابع $y = 3^x - 3$ را رسم کنید.

(ب) اگر این نمودار محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند، طول پاره‌خط AB چقدر است؟

۱۰. به روش هندسی نشان دهید، معادله $x \times 2^x = 1$ فقط یک جواب دارد.

۱۱. معادله لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$\log_7(m^2 + 4m + 1) - \log_7\left(m^2 - \frac{1}{4}\right) = 3$$

۱۲. نیمه عمر یک ماده هسته‌ای 20 سال است. نمونه‌ای از این ماده 64 میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از 200 سال باقی می‌ماند، چند میلی‌گرم است.

۱۳. در دایره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر طول کمان مقابل به زاویه مرکزی θ برابر 30 سانتی‌متر است.

الف) مقدار θ چند رادیان است؟

(ب) این زاویه حدوداً چند درجه است.

۱۴. اگر $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، مقدار عددی عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\cos\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right)$

ب) $\sin 2\alpha$

پ) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

۱۵. نمودار $y = 1 - \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۱۶. با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، حد تابع f را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

۱۷. آیا تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ در $x=1$ حد دارد؟ چرا؟

۱۸. حاصل حدود زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x + \sqrt{x+2}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$

۱۹. نمودار تابع $f(x) = [x] + [-x]$ را رسم کنید و با توجه به آن مجموعه نقاط پیوستگی تابع را مشخص کنید.

۲۰. مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x=-2$ پیوسته باشد.

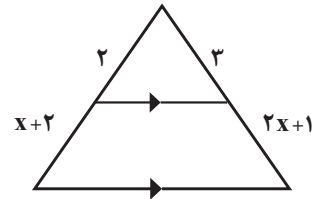
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} & x < -2 \\ a & x = -2 \\ 3x + b & x > -2 \end{cases}$$

ریاضی ۲ (تجربی)

۱. الف) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-2, 1)$ گذشته و با خط $y = 3x - 1$ موازی باشد.

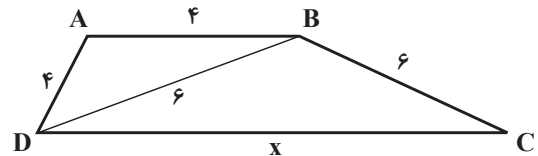
ب) معادله $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = 3$ را حل کنید.

۲. در شکل ۱ مقدار x را محاسبه کنید.



شکل ۱

۳. در شکل ۲ چهارضلعی ABCD دوزنقه است. طول CD را محاسبه کنید.



شکل ۲

۴. دامنه تابع‌های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = \frac{-2x-4}{x^2-2x+3}$

ب) $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

۵. اگر $f = \{(0, 2), (1, -1), (3, -\frac{1}{4}), (-2, 3), (-1, 0)\}$ و

$g = \{(2, \sqrt{2}), (-1, 2), (\frac{1}{4}, 3), (1, \frac{3}{2})\}$ آن گاه:

الف) تابع $f \circ g$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) مقدار $\frac{f}{g}(1)$ را محاسبه کنید.

۶. مقدار عددی عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\tan(-\frac{37\pi}{4})$

ب) $\sin(-\frac{121\pi}{6})$

۷. نمودار تابع $y = -2\cos(x - \frac{\pi}{3})$ را رسم کنید.

۸. الف) نمودار تابع $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

پ) محل تقاطع این نمودار را با محورهای مختصات مشخص کنید.

ت) آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

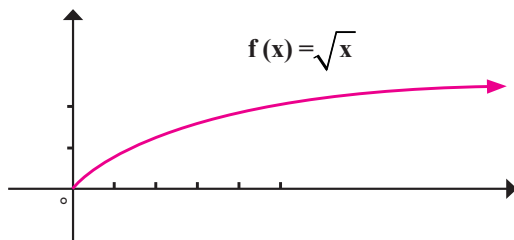
۹. الف) اگر $\log_2 = 0/3$ و $\log_3 = 0/48$ ، مقدار تقریبی عبارت زیر را بیابید.

$\log 1500$

ب) معادله لگاریتمی زیر را حل کنید.

$\log_7(x+1) + \log_7 x = \log_7 6$

۱۰. با استفاده از نمودار زیر، حاصل عبارت‌های خواسته شده را بنویسید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$

ت) $f(0)$

۱۱. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-9}{2x-6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x]}{x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]-2}{x}$

۱۲. پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} |x-2| & x > 2 \\ x-2 & x = 2 \\ 3-x^2 & x < 2 \end{cases}$ را در نقطه $x_0 = 2$ بررسی کنید.



۳. عددهای مثبت a ، b و c را طوری تعیین کنید که عددهای $۲۷, a, b, c, ۳$ جمله‌های متوالی دنباله هندسی باشند.

۴. برجی از نقطه‌های A و B که در فاصله ۲۷ متری از یکدیگر و در یک طرف برج قرار دارند، با زاویه ۳۰° و ۴۵° دیده می‌شود. ارتفاع برج را به دست آورید.

۵. اگر $\sin \alpha \geq \cos \alpha$ در چه ناحیه‌ای و بین چه زاویه‌هایی قرار دارد؟

۶. درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

۷. اگر $0 < a < 1$ ، حاصل عبارت زیر را بنویسید:

$$A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt{a}|$$

۸. اگر $a = \sqrt[3]{\frac{1}{1000000} \cdot 27}$ ، $\sqrt{3}$ را بر حسب a به دست آورید.

۹. عبارت $2x^3 - x^2 + x - 2$ را تجزیه کنید.

۱۰. سه برابر مقدار مثبتی از معکوس آن، دو واحد کمتر است. این مقدار را پیدا کنید.

۱۱. اگر $A = (-1, -2)$ رأس یک سهمی باشد و خط $y = 7$ نمودار سهمی را در نقطه‌ای به طول ۴- قطع کند، نقطه دیگر برخورد این خط با سهمی و معادله سهمی را تعیین کنید.

۱۲. اگر مجموعه جواب نامعادله $x^2 \geq 2x + 8$ برابر $|x - a| > b$ باشد، a و b را به دست آورید.

آمار و احتمال (پایه دهم)

۱. کدام یک گزاره است؟

(الف) $x^2 + 1 > x - 3$

(ب) رقم دهم $\sqrt{2}$ در بسط اعشاری، عدد ۷ است.

۲. در مجموعه عددهای حقیقی، مجموعه جواب کدام یک از گزاره‌های زیر تهی است.

(الف) $x + |x| = 2x$

(ب) عدد $5^a - 10^a$ بر ۲ بخش پذیر است. ($a \in \mathbb{Z}$)

۱۳. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، به طوری که $P(A) = \frac{2}{5}$ و $P(A \cup B) = \frac{1}{4}$ ، آن گاه $P(B)$ را به دست آورید.

۱۴. احتمال قبولی باران و بهار در کنکور سراسری به ترتیب برابر 80% و 60% است. احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید.

(الف) هر دوی آن‌ها در کنکور قبول شوند.

(ب) حداقل یکی از آن‌ها قبول شود.

۱۵. جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید:

(الف) اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شوند، واریانس آن‌ها ...

(ب) اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شوند، واریانس آن‌ها ...

(پ) واحد واریانس برابر با ... واحد داده مورد نظر است.

(ت) جذر واریانس را ... می‌نامند.

ریاضی ۱ (پایه دهم)

۱. مجموعه اعداد گویای بین دو عدد ۲ و ۳ متناهی است یا نامتناهی؟ چرا؟

۲. در الگوی زیر، شکل n ام شامل چند نقطه است؟



۳. نشان دهید که گزاره زیر همواره درست است.

$$p \Rightarrow [\sim (p \Rightarrow q) \vee q]$$

۴. هم‌ارزی زیر را ثابت کنید:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

۵. نقیض گزاره زیر را بنویسید:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, [ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)]$$

۶. اگر سه عضو از اعضای مجموعه A کم کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن به اندازه ۱۱۲ تا کم می‌شود. مجموعه توانی A دارای چند عضو است؟

۷. درستی گزاره‌های زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$\text{الف) } A \subseteq B \wedge A' \subseteq B \Rightarrow B = U$$

$$\text{ب) } A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

۸. در شلیک به یک هدف، احتمال اصابت اولین گلوله ۳۷٪ و برای دومین گلوله ۵۳٪ است. در صورتی که احتمال اصابت هر دو گلوله ۲۱٪ باشد، با چه احتمالی فقط یکی از دو گلوله به هدف اصابت خواهد کرد؟

۹. در یک تاس احتمال روشن شدن ۳، نصف احتمال رو شدن سایر عددهاست. در یک پرتاب این تاس، چه قدر احتمال دارد که عددی بزرگ‌تر از ۴ ظاهر نشود؟

۱۰. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و داشته باشیم:

$$P(A|B) = \frac{2}{5} \text{ و } P(B-A) = \frac{1}{2}$$

حاصل P(B) را به دست آورید.

۱۱. در یک منطقه خاص، احتمال اینکه شخصی حداقل ۸۰ سال عمر کند، ۷۵٪ و احتمال اینکه شخصی از ۹۰ سال بیشتر زنده بماند، ۶۳٪ است. اگر شخصی به تصادف از افراد ۸۰ ساله این منطقه انتخاب شود، با چه احتمالی این فرد حداقل ۹۰ سال عمر می‌کند؟

۱۲. پنج باتری سالم با دو باتری معیوب مخلوط شده‌اند. برای یافتن باتری‌های سالم، همه باتری‌ها را بدون جای‌گذاری امتحان می‌کنیم. احتمال اینکه دو باتری معیوب در سه آزمایش اول مشخص شوند، چقدر است؟

۱۳. در یک شرکت، ۵٪ مردان و ۲٪ زنان درآمدی بسیار بالا دارند. اگر ۳۰٪ کارکنان این شرکت زن باشند، با چه احتمالی فردی که به تصادف انتخاب شده است و درآمد بالایی دارد، زن است؟

۱۴. از جعبه‌ای با ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز، مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم و سپس آن را همراه با ۲ مهره از همان رنگ به جعبه برمی‌گردانیم. اگر مهره‌ای از جعبه خارج کنیم، احتمال آنکه این مهره آبی باشد چقدر است؟

پرسش‌های بیکار جو! ۵*

می‌خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز هفت ناحیه درون شکل سمت راست را رنگ‌آمیزی کنیم؛ به طوری که ناحیه‌های همسایه رنگ‌های متفاوتی داشته باشند (ناحیه‌هایی که فقط در یک نقطه اشتراک دارند، همسایه نیستند). انجام این کار به چند طریق ممکن است؟

الف) ۶۴

ب) ۷۴

ج) ۸۴

د) ۹۰

ه) ۹۶

*اصل سؤال مربوط به المپیادهای ریاضی ایران است و فرستنده سؤال و راه‌حل آن، آقای محمدرضا پونئید از شیراز است.